解答

（２）　①より

$$2^k a_k = 2^k \times 4k(k+1)$$
$$= 2^{k+2} k(k+1)$$

とかけることより、

$$B = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot 2^{k+2}$$
$$= 1\times 2\cdot 2^3 + 2\times 3\cdot 2^4 + 3\times 4\cdot 2^5 + \cdots + n(n+1)\cdot 2^{n+2}$$
$$= 2^3\{1\times 2\cdot 1 + 2\times 3\cdot 2 + 3\times 4\cdot 2^2 + \cdots + n(n+1)\cdot 2^{n-1}\} \quad \cdots\cdots ②$$

である。ここで、

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)$$
$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$$
$$f''(x) = 1\times 2 + 2\times 3x + 3\times 4x^2 + \cdots + n(n+1)x^{n-1}$$

$\left(x^{n+1}\right)''_{x=2}$　２回微分したのと同じ

②における{　}は $f''(2)$ に一致する。

よって

$$f'(x) = \frac{(n+2)x^{n+1}(x-1) - \left(x^{n+2}-1\right)\times 1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(n+2)(n+1)x^n(x-1)^3 - \{(n+2)x^{n+1}(x-1) - \left(x^{n+2}-1\right)\}\times 2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$\therefore\ f''(2) = (n+2)(n+1)2^n - 2\{(n+2)2^{n+1} - 2^{n+2} + 1\}$$
$$= 2^n\left(n^2 - n + 2\right) - 2 \quad \cdots\cdots ③$$

②③より

$$B = 2^{n+3}\left(n^2 - n + 2\right) - 16$$

解説

かなり手ごわい問題です。医学部受験生レベルでも難しかったと思います。

a_k **については、（１）で求めたので、これを代入するところまでは（１）と同じです。**

つまり、$B=\sum_{k=1}^{n}2^k a_k=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdot 2^{k+2}$ となります。
問題はここからです。
この数列の和をどう処理するかです。

ここで、本サイトの数学の勉強法の中でも少しふれている、「数列は、実数の関数の中の、x=1,2,…,n という自然数部分だけをとりだしたとびとびの特殊な関数にすぎない」、という理解ができているかどうかがカギとなります。

そこで一旦、実数の関数（連続量）としてとらえて考えます。

そういう見方をすると、$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}$ としたときに、これを２回微分した形（x=2 のとき）と一致することにも気づきやすくなります。

$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}=\dfrac{x^{n+2}-1}{x-1}\quad(x\neq 1)$ と等比数列の和として変形できるので、これを２回微分すれば式として求まる、という流れです。

数列と関数の互換性を意識しないと解くことが難しい、という問題の例でした。