解答

（1）i)　$n=1$のとき

$$S_1=a_1=\frac{4}{3}\times1\times2\times3=2^3$$

ii)　$n\geq2$のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{4}{3}(n-1)n(n+1)\\&=4n(n+1)\end{aligned}$$

i),ii)より　$a_n=4n(n+1)$　　$\cdots$①　とかける。よって

$$\begin{aligned}A&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{n}{4(n+1)}\end{aligned}$$

解説

まず、次の基本を思い出します。

$$a_n=S_n-S_{n-1}\quad(n\geq2)$$
$$a_1=S_1$$

これによりa_kがkの式であらわすことができるので、これを代入して$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}$となり、-2乗の階乗関数の和となるので、-1乗の関数の差分分解に変形して和を求めます。